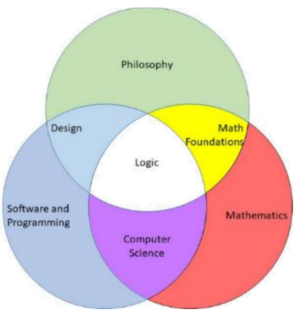
University of BOUIRA
Faculty of sciences
Department of Informatics

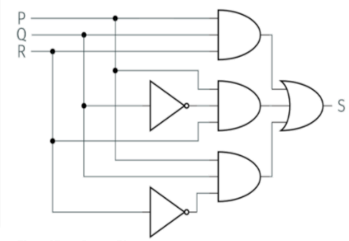
Module **Logique Mathematique** 2ème Année Licence

Cours 8

Logique des prédicats



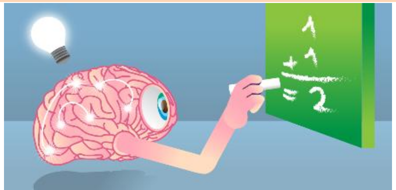
Input			Output
P	Q	R	S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0



$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

bases

BY : BENAISSI Sellami s.benaissi@gmail.com



OCT 2022

PLAN

Part 1

Rappelle

Terminologie ou vocabulaire

المنطق الإسنادي = منطق الرتبة الأولى
predicate logic = First-order logic = quantificational logic,
Calcul des prédicats = Logique du premier ordre

La logique des prédicats (logique du premier ordre) (LP1) est considéré comme une extension de la logique propositionnelle qui donne la possibilité d'utiliser d'autres notions (termes, fonctions, relations, …etc.). Cette extension est obtenue grâce à l'introduction des deux quantificateurs ∃et ∀.

Prédicat et généralisation

Notion de prédicats :

permet d'exprimer une **relation entre individus**.

On aura pour l'exemple précédent les prédicats:

- **Père(x, y) :** x est père de y

Cette relation est **vraie ou fausse** selon les valeurs de x et de y.

C'est une **généralisation** de la notion de variable propositionnelle.

- **GrandPère(x, y) :** x est grand-père de y

Si x est père de y et si y est père de z alors x est grand-père de z

Ce qui donne la modélisation :

$$\mathbf{Père(x, y) \land Père(y, z) \rightarrow GrandPère(x, z)}$$

Quantificateur existentiel et quantificateur universel

Par exemple, pour traduire le fait qu'il y a des étudiants **absents** ou le fait que tous les étudiants soient **présents**, le calcul des prédicat introduit deux nouveaux symboles,

- le quantificateur existentiel $\exists$ et
- le quantificateur universel $\forall$

Si on écrit

- **Absent(x)** pour dire que **x est absent** et
- **Present (x)** pour dire que **x est présent**,

on écrira alors:

- $\exists x\ \boldsymbol{Absent(x)}$ pour exprimer que « **il y a des absents** »
- $\forall x\ \boldsymbol{Present(x)}$ pour exprimer que « **tout le monde est présent**»

L'alphabet du langage de la LP1

L'alphabet du langage de la logique des prédicats est composé de:

- connecteurs logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Variables : $x, y, z, \ldots$
- constantes : Amine, A, B, …
- fonctions : $f, g; \ldots$
- prédicats : $P, P_1, P_2, Q, \ldots$
- quantificateurs : $\forall, \exists$
- symboles auxiliaires : (,).

LOGIQUE DES PRÉDICATS

Syntaxe

Termes	Les constantes, les variables, Les applications des fonctions aux termes sont des termes
Formule	• Un prédicat est une formule • La négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence de formules sont aussi des formules • La quantification universelle et la quantification existentielle d'une formule est une formule
Priorité des connecteurs	$\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \rightarrow, \leftrightarrow$
Champ d'un quantificateur	la partie de la formule couverte par un quantificateur. $\forall x\ \underline{\neg\alpha}$, $\exists x\ \underline{\alpha \wedge \beta}$, $\forall x\ \underline{\alpha} \rightarrow \beta$,
Variable libre et variable liée	Une occurence d'une variable **x** dans une formule est dite **liée** si elle possède une occurrence dans le champ d'un quantificateur $\forall$ (ou $\exists$)

Part 2

Quantificateurs

Quantificateurs

Les quantificateurs sont des symboles mathématiques utilisés à fin de simplifier la rédaction des propositions mathématiques.

Il existe deux quantificateurs:

- Le quantificateur universel ($\forall$)
- Le quantificateur existentiel ($\exists$)

Quantificateurs

Quantificateur universel:

$$\forall < variables >< énoncé >$$

Se lit: « pour tout… », « quel que soit… », « quiconque …», « tous »,

…

Exemples:

« **Tous** **les** **<u>étudiants</u>** **sont** **<u>intelligents »</u>** se modélise par:

$$\forall x\ (Etudiant(x) \Rightarrow\ Intelligent(x))$$

« Tout A(x) est B(x) » se modélise par:

$$\forall x\ (A(x) \Rightarrow B(x))$$

Quantificateurs

Quantificateur universel:

$\forall x\ P$ est équivalent à la conjonction de toutes les instanciations de P :

$$\forall x P(x) \iff P(n_1) \wedge P(n_2) \wedge \cdots \wedge P(n_k)$$

$$Etudiant(Fateh) \Rightarrow Intelligent(Fateh) \wedge$$

$$Etudiant(Tarek) \Rightarrow Intelligent(Tarek) \wedge$$

$$Etudiant(Salima) \Rightarrow Intelligent(Salima) \wedge$$

$$Etudiant(Fatma) \Rightarrow Intelligent(Fatma) \wedge \ldots$$

Le connecteur principal à utiliser avec ∀ est l'implication ⇒

Quantificateurs

Quantificateur existentiel:

$$\exists < variables >< énoncé >$$

se lit: « il existe… », « il existe au moins un… »,

« certains …»

Exemples:

«Il existe des <u>étudiants</u> sont <u>intelligents»</u> se modélise par:

$$\exists x\ (Etudiant(x) \wedge\ Intelligent(x))$$

«Certains A(x) sont B(x)» se modélise par:

$$\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$$

Quantificateurs

Quantificateur existentiel:

$\exists x\ P$ est équivalent à la disjonction de toutes les instanciations de P :

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow P(n_1) \vee P(n_2) \vee \cdots \vee P(n_k)$$

$$(Etudiant(Fateh) \wedge Intelligent(Fateh)) \vee$$

$$(Etudiant(Tarek) \wedge Intelligent(Tarek)) \vee$$

$$(Etudiant(Salima) \wedge Intelligent(Salima)) \vee$$

$$(Etudiant(Fatma) \wedge Intelligent(Fatma)) \vee \cdots$$

Le connecteur principal à utiliser avec $\exists$ est la conjonction $\wedge$.

Quantificateurs

Les propriétés des quantificateurs:

- $\forall x \forall y$ *est équivalent à* $\forall y \forall x$
- $\exists x \exists y$ *est équivalent à* $\exists y \exists x$

- ***Attention :***

$\exists x \forall y$ *n'est pas équivalent à* $\forall y \exists x$

- ❑ $\exists y \forall x\ Mange(x, y)$ *signifie "Il existe une chose mangé par tout le monde"*
- ❑ $\forall x \exists y\ Mange(x, y)$ *signifie "Tout le monde mange quelque chose"* *(pour toute personne, il* existe quelque chose qu'il mange)

Quantificateurs

Les propriétés des quantificateurs:

Négation des quantificateurs: Les deux quantificateurs sont liés par le biais de la négation.

$$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Exemple:

$\forall x\ Mange(x, Glace)$ *est équivalent à* $\neg \exists x \neg\ Mange(x, Glace)$

$\exists x\ Mange(x, Brocoli)$ *est équivalent à* $\neg \forall x \neg\ Mange(x, Brocoli)$

Part 2

Sémantique de logiques des prédicats

Sémantique

L'objectif de la sémantique de la logique des prédicats est :

- Donner une signification aux symboles de prédicats
- Donner une signification aux symboles de fonctions
- Fixer le domaine dans lequel les variables prennent leurs valeurs
- Etablir les valeurs de vérité des formules

Sémantique

La valeur de vérité de la formule dépend de comment on "lit" le symbole de prédicat et du domaine de discours considéré.

- Quelle sera la valeur de vérité de la formule f: $\exists x \forall y P(x,y)$

Exemple 1 : Domaine = N, $P(x,y) = x \leq y$

- La formule se lit : Il existe un entier naturel (x) inférieur ou égale à tous les entiers
- La formule est **vraie**

Exemple 2 : Domaine = **N**, $P(x,y) = x < y$

- La formule se lit : Il existe un entier naturel (x) inférieur strictement à tous les entiers
- La formule est **fausse** (nous n avons pas 0 < 0

Sémantique

Structure

On appelle **structure** tout quadruplet où:

- **D**: est un ensemble *non vide* appelé domaine de discours
- **C**: un ensemble (vide ou non) de constantes
- **F**: un ensemble (vide ou non) de fonctions sur D
- **R**: un ensemble (vide ou non) de relations sur D

3

S = (D, C, F, R)

Sémantique

Structure

Exemples :

- S1=(D,C,F,R) / D = N, C = {0}, F = {+,*,succ}, R = {≤}
- S2=(D,C,F,R) / D = R, C = {0,1}, F = {+,*,-}, R = Ø
- S3=(D,C,F,R) / D = N, C = {0}, F = {+,*,-}, R = {≤}

N'est pas une structure car la soustraction n'est pas interne dans N

- S4=(D,C,F,R) / D = Ø, C = {0}, F = {+,*}, R = {≤}

N'est pas une structure car le domaine est vide

Sémantique

Interprétation d'un langage

Soit **L** un langage défini par d es symboles de constantes (c_1 ,c_2 ,..,c_n)), des symboles de fonctions f_1 ,f_2 ,..,f_n et des symboles de prédicats p_1 ,p_2 ,..,p_n

- Soit **S = (D,C,F,R)** une structure
- Une interprétation de **L** dans **S** consiste à associer :

- A chaque constante $\mathbf{c_i}$ de **L** un élément de **C**. on note $\mathbf{[c_i]_s}$
- A chaque fonction $\mathbf{f_i}$ de **L** une fonction de **F**. on note $\mathbf{[f_i]_s : D^n \rightarrow D}$
- A chaque prédicat p_i de **L** une relation de **R**. on note $\mathbf{[p_i]_s}$

Interprétation d'un langage

Exemple 1 :

- Soit **L1** un langage défini par : Un symbole de constante **c**et un prédicat **p** de poids 2.
- Soit **S1** = (N,{0},Ø,{≤}). L'interprétation de L1 dans S1:
    - **$[c]_{s1}$= 0**
    - **$[p(x,y)]_{s1}$= x<y (inférieur(x,y))**

- Soit S2 = ({Farid,Mohamed,Salah},{Salah},Ø,{frère-de}). L'interprétation de L1 dans S2:
    - **$[c]_{s2}$= Salah**
    - **$[p(x,y)]_{s2}$= x frère-de y (frère-de(x,y))**

Interprétation d'un langage

Exemple 2 :

Soit **L2** un langage défini par : Deux symboles de constantes **c1** et **c2**, un symbole de fonction **f** de poids 1, deux symboles de fonctions **g** et **h** de poids 2 et un prédicat **p** de poids 2

Soit **S = (R,{0,1},{+,*,carré},{<}).** L'interprétation de L1 dans S1:

- $[c_1]_s = 0$
- $[c_2]_s = 1$
- $[p(x,y)]_s = x<y$ **(inférieur(x,y))**
- $[g(x,y)]_s = x+y$
- $[h(x,y)]_s = x*y$
- $[f(x)]s = x_2$

Interprétation d'un langage

Tout langage a au moins une structure comme interprétation

- Un langage peut avoir plusieurs structures comme interprétations
- Etant donné un langage L et une structure S. il peut exister plusieurs interprétation de L dans S :

Exemple :

- Soit L_1 un langage défini par deux constantes c_1 et c_2
- Soit S_1 = (0,1)

Deux interprétations de L_1 dans S_1

- ✓ $[c_1]s_1 = 0$ et $[c_2]s_1 = 1$
- ✓ $[c_1]s_1 = 1$ et $[c_2]s_1 = 0$

Interprétation d'un langage

Exemple:

Soit la formule $F = P\ (f\ (x, y), y)$

On peut présenter deux interprétations pour cette formule:

- $D = \mathbb{Z}$ (ensemble des nombres entiers),
- $f\ (x, y) = x - y$,
- $P\ (x, y) =$ « $x > y$ »

- $D = \mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels),
- $f\ (x, y) = (x^2 - y)/2$,
- $P\ (x, y) =$ « $x = y$ »

Thank you